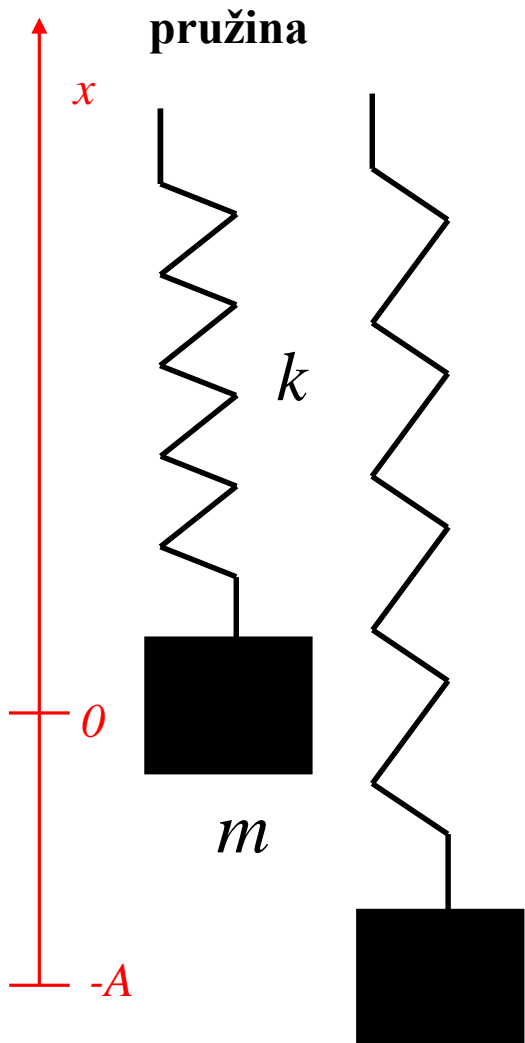


Opakování - Harmonický oscilátor – pružina



$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad \text{pohybová rovnice}$$

obecné řešení:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

úhlová
frekvence $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

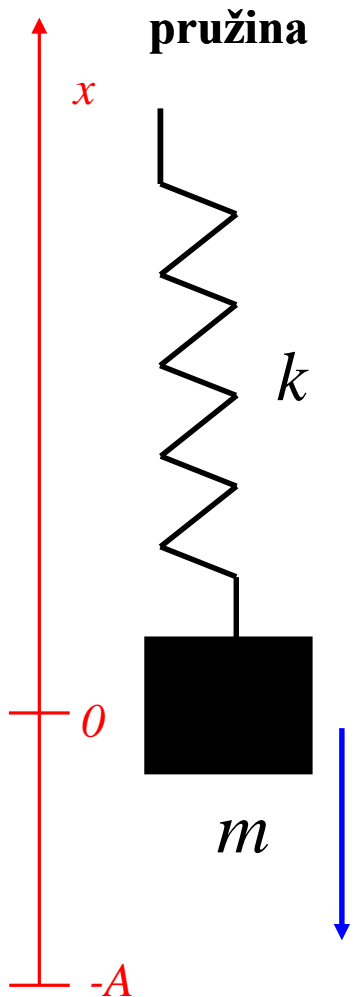
fázový posuv

$$x(t) = A \cos \varphi \sin \omega t + A \sin \varphi \cos \omega t$$

$$C_1 = A \cos \varphi, \quad C_2 = A \sin \varphi$$

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

Nucené kmity



pružina

- budící síla: $F = F_0 \sin(\Omega t)$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

- obecné řešení: $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + x_p$

- partikulární řešení: $x_p = A_p \sin(\Omega t)$

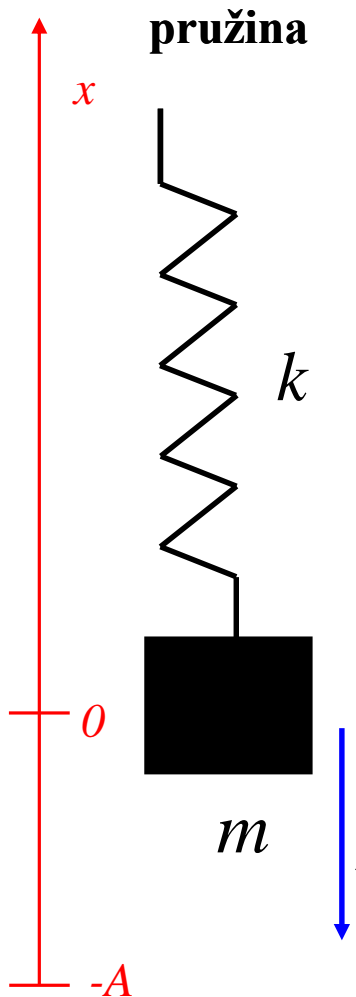
partikulární řešení: \swarrow

$$\left(-A_p \Omega^2 + A_p \omega_0^2\right) \sin(\Omega t) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \Rightarrow A_p \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) = \frac{F_0}{m}$$

$$A_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \quad x_p = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t)$$

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t)$$

Nucené kmity



• budící síla: $F = F_0 \sin(\Omega t)$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t) \quad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

• obecné řešení: $x(t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \sin(\Omega t)$

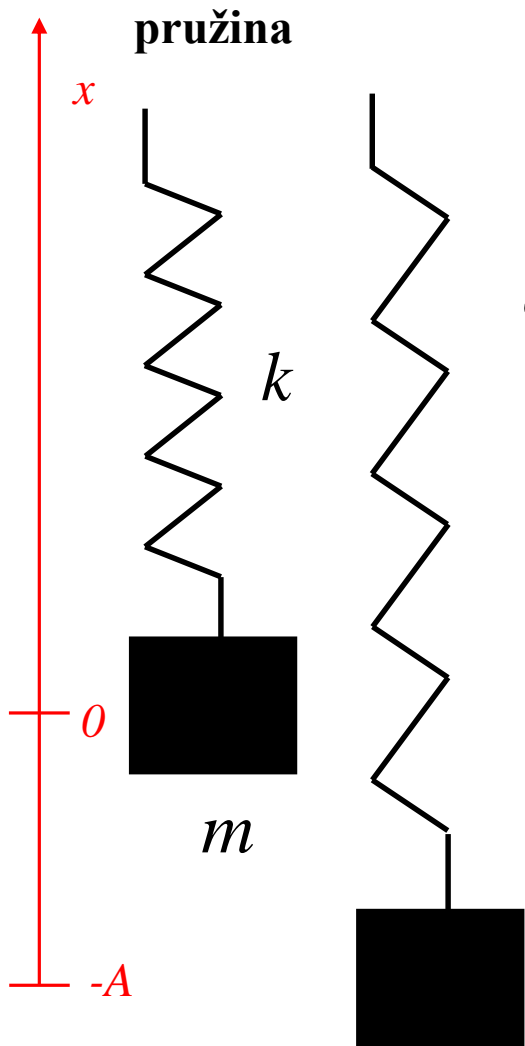
• počáteční podmínky: $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$

$$0 = A \sin \varphi \Rightarrow \varphi = N\pi$$

$$0 = A \omega_0 \cos \varphi + \frac{F_0 \Omega}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \Rightarrow A = -\frac{\Omega}{\omega_0} \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \frac{1}{\cos N\pi}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)} \left(\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)$$

Opakování - Tlumené kmity



Tlumící (odporová) síla:

$$F_v = -h\dot{x}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

Řešení : $x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \quad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2$$

aperiodický pohyb: $D > 0$

mezní aperiodický pohyb: $D = 0$

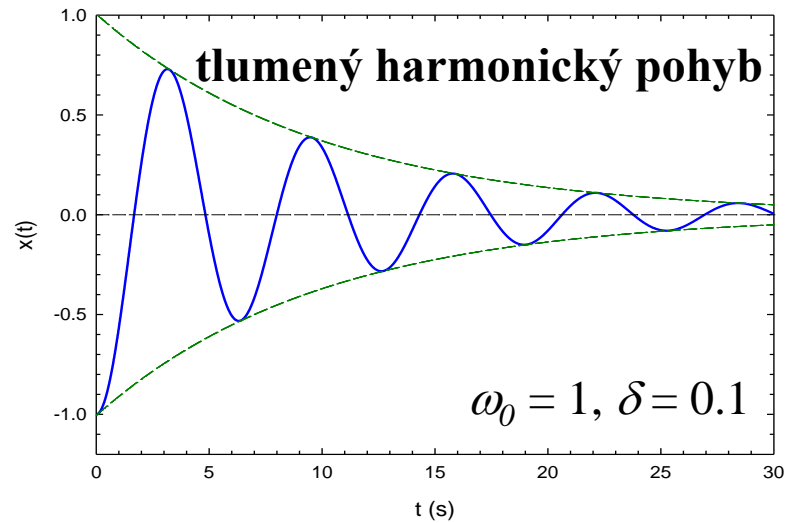
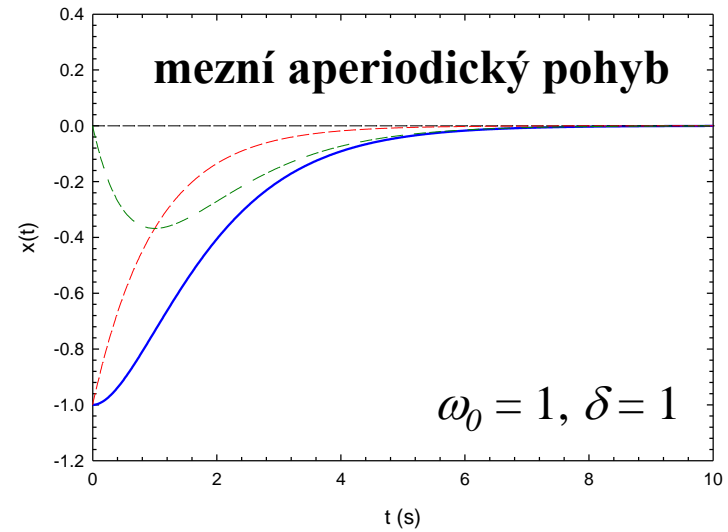
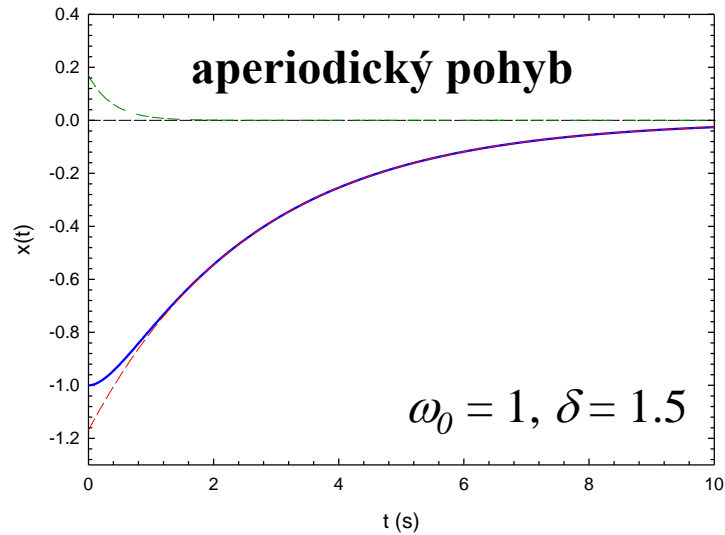
tlumený harmonický pohyb: $D < 0$

Pohybová rovnice:

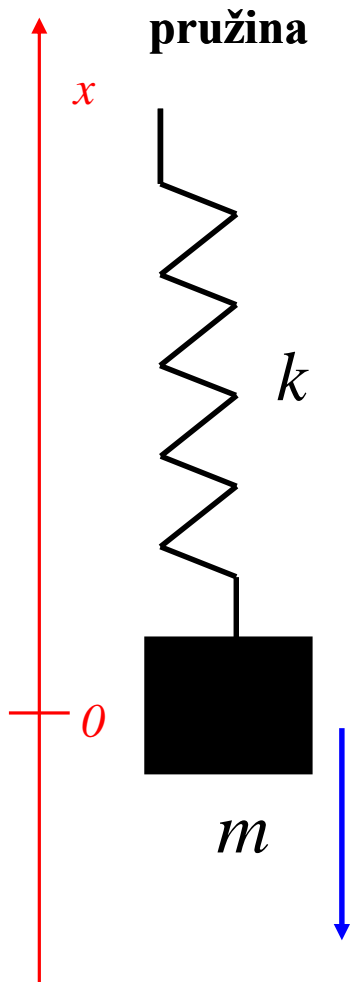
$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Opakování - Tlumené kmity



Nucené kmity s tlumením



- budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

- obecné řešení: $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + x_p$

- partikulární řešení: $x_p = A_p \sin(\Omega t + \alpha)$ partikulární řešení:

$$(A_p \omega_0^2 - A_p \Omega^2) \sin(\Omega t + \alpha) + 2\delta A_p \Omega \cos(\Omega t + \alpha) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$A_p [(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \alpha - 2\delta \Omega \sin \alpha] \sin(\Omega t) +$$

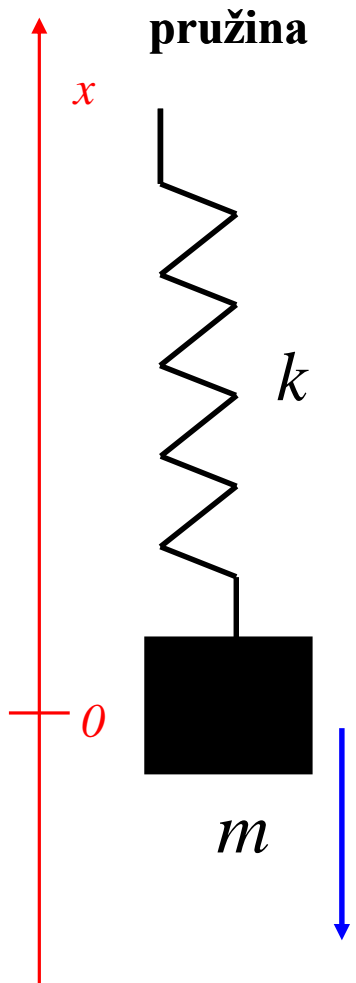
$$+ A_p [(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \alpha + 2\delta \Omega \cos \alpha] \cos(\Omega t) = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

Nucené kmity s tlumením



- budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

$$A_p \left[(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \alpha - 2\delta \Omega \sin \alpha \right] = \frac{F_0}{m}$$

$$A_p \left[(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \alpha + 2\delta \Omega \cos \alpha \right] = 0$$

- Pro A_p různé od 0: $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\delta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$

- Umocníme a sečteme:

$$A_p = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$

- pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

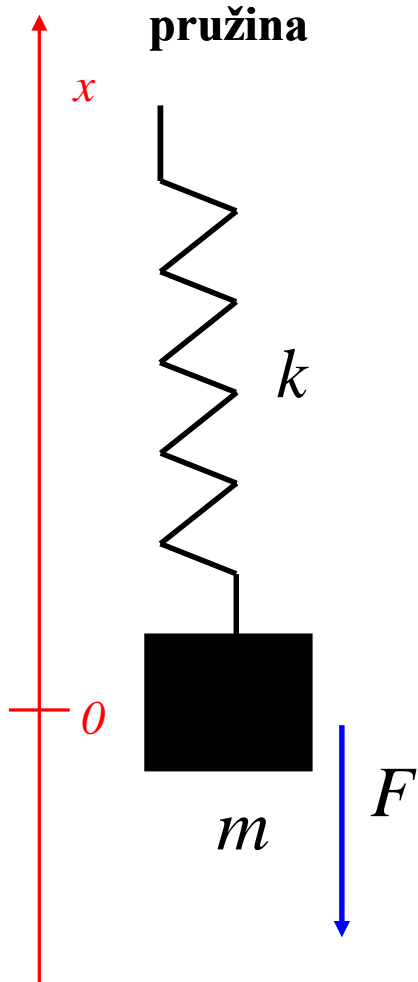
Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci

harmonický kmit: $x = A \sin(\omega t + \varphi) \longrightarrow Ae^{i(\omega t + \varphi)}$

amplituda úhlová frekvence fázový posuv

$$Ae^{i(\omega t + \varphi)} = A \cos(\omega t + \varphi) + iA \sin(\omega t + \varphi)$$

Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci



- budící síla:

$$F = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

- obecné řešení: $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + x_p$

- partikulární řešení: $x_p = A_p e^{i(\Omega t + \alpha)}$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

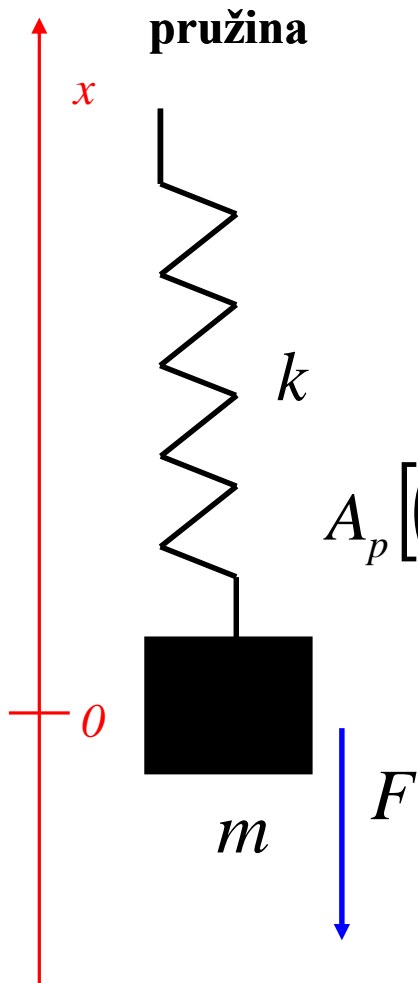
$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

partikulární řešení:

$$\left(A_p \omega_0^2 - A_p \Omega^2 \right) e^{i(\Omega t + \alpha)} + i 2\delta A_p \Omega e^{i(\Omega t + \alpha)} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$A_p \left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2 \right) + i 2\delta \Omega \right] = \frac{F_0}{m} e^{-i\alpha}$$

Nucené kmity s tlumením – řešení v komplexní reprezentaci



pružina

• budící síla:

$$F = F_0 e^{i\Omega t}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t}$$

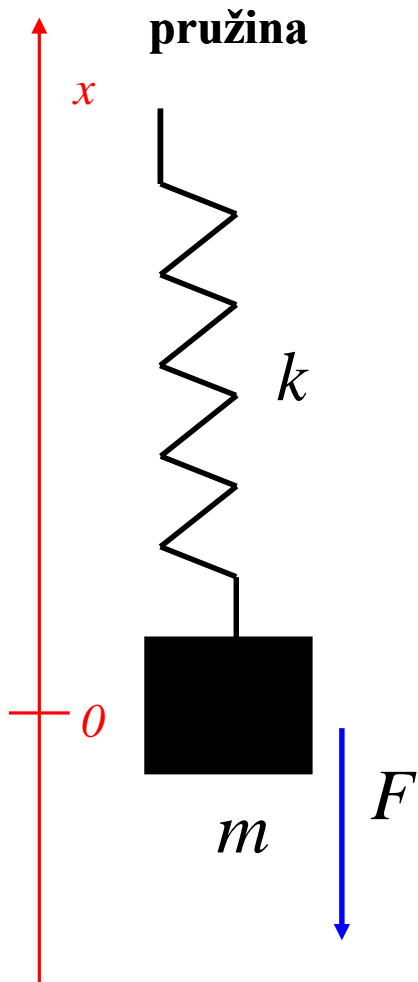
$$A_p [(\omega_0^2 - \Omega^2) + i2\delta\Omega] = \frac{F_0}{m} e^{-i\alpha} \quad \hat{K} = (\omega_0^2 - \Omega^2) + i2\delta\Omega = Ke^{i\beta}$$

$$K = |\hat{K}| = \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}, \quad \text{tg} \beta = \frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$A_p Ke^{i\beta} = \frac{F_0}{m} e^{-i\alpha} \Rightarrow \text{tg} \alpha = -\text{tg} \beta = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$A_p = \frac{F_0}{mK} = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$

Nucené kmity s tlumením



- budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

- Partikulární řešení:

$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \sin\left(\Omega t + \arctg \frac{2\delta\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$$

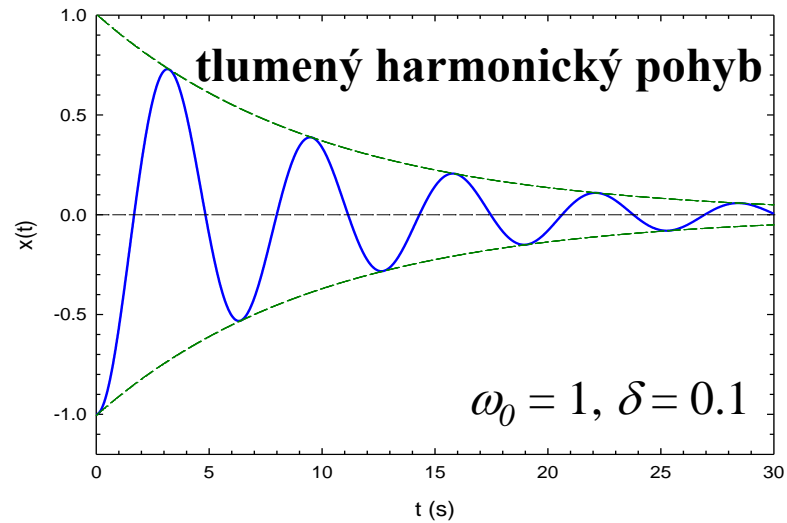
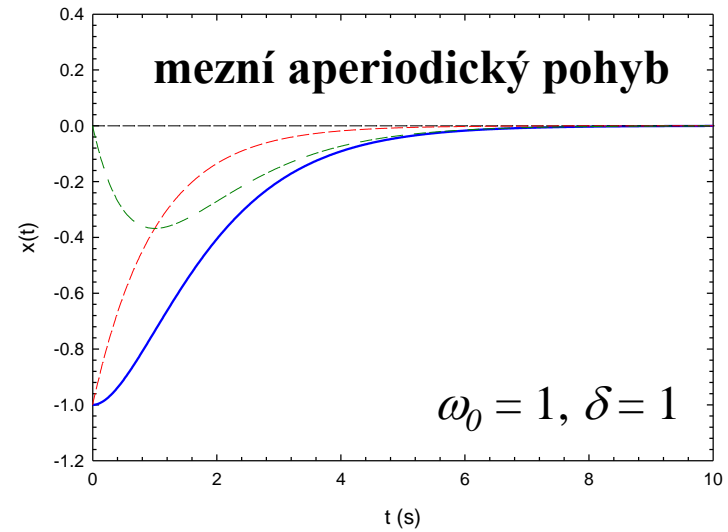
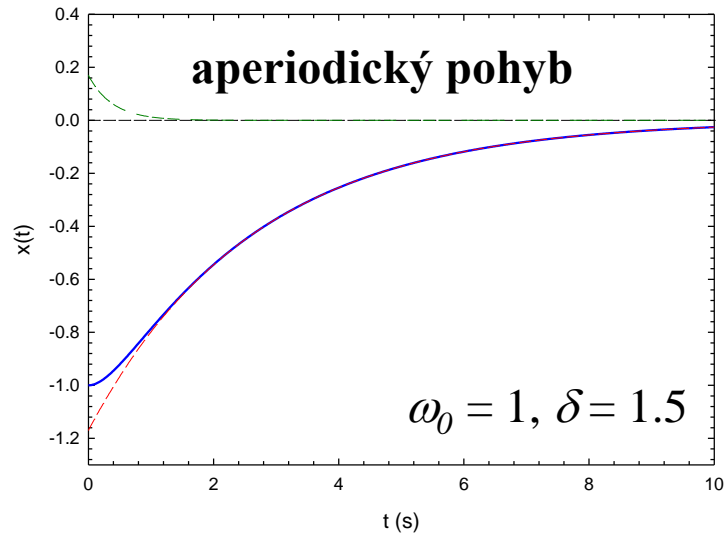
- Část řešení: $C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$, $\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$
konverguje k nule s rostoucím časem. Po dostatečně dlouhé době
v **ustáleném stavu** lze tento člen zanedbat a za řešení pokládat pouze x_p .

- pohybová rovnice:

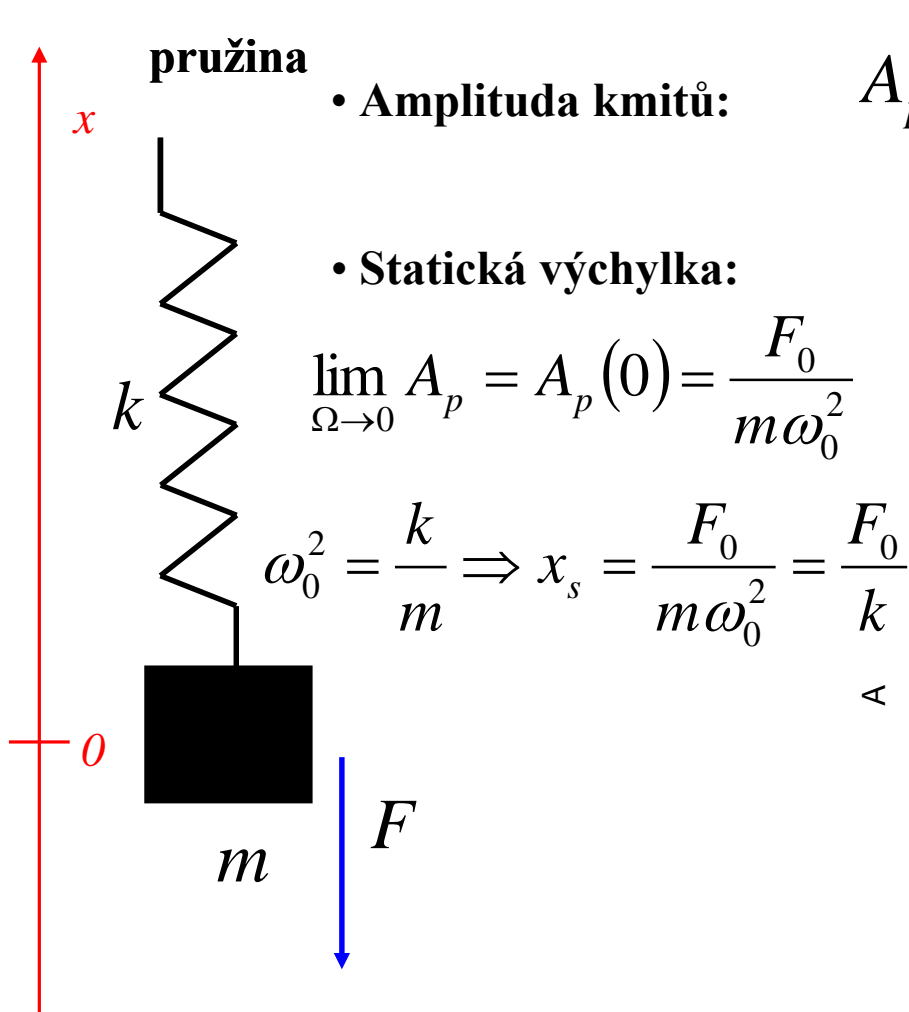
$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

Opakování - Tlumené kmity

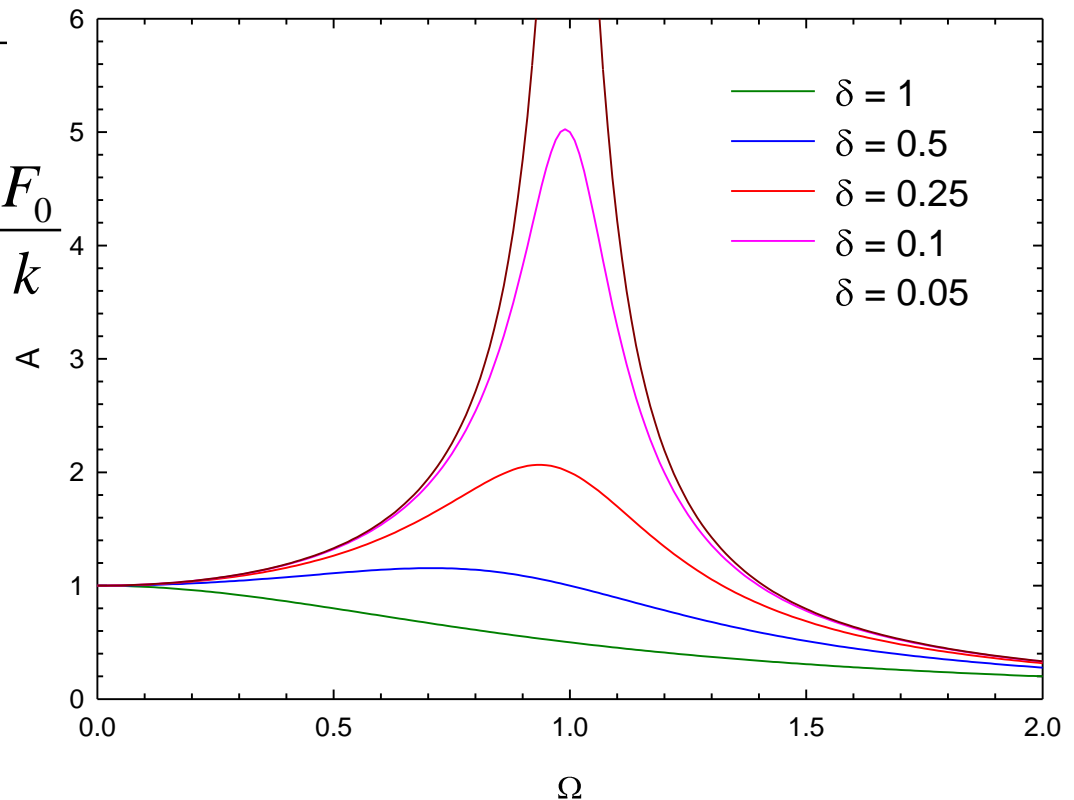


Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

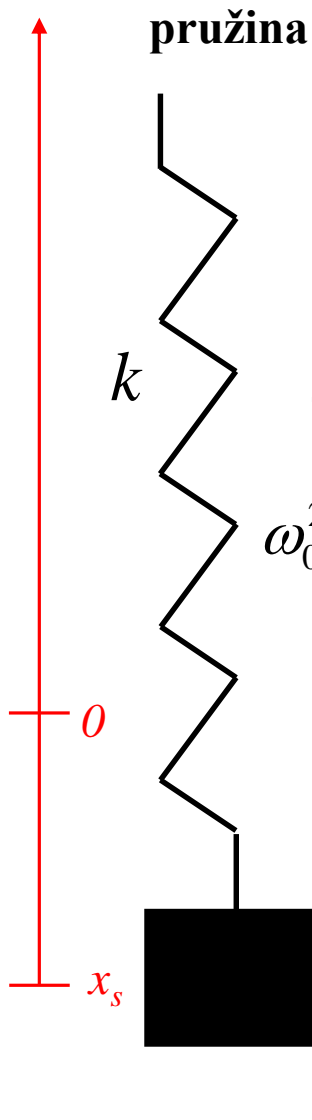


$$A_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\omega_0 = 1, F_0 = 1, m = 1$$



Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu



• Amplituda kmitů:

$$A_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

• Statická výchylka:

$$\lim_{\Omega \rightarrow 0} A_p = A_p(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

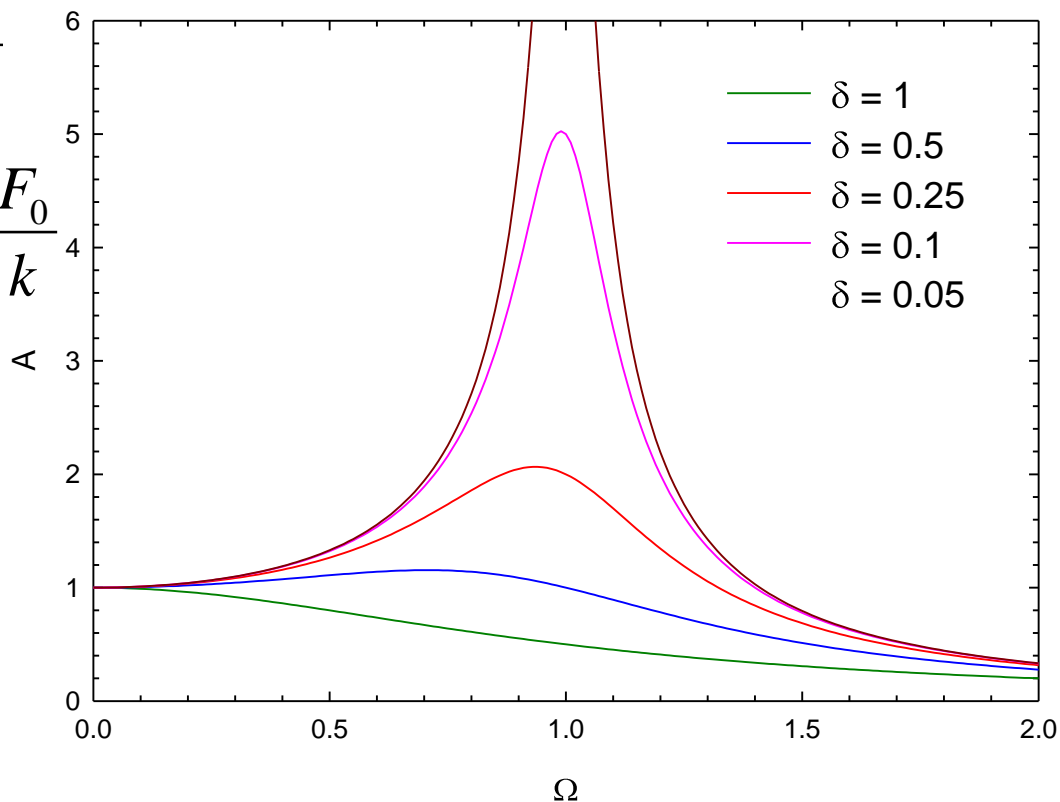
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow x_s = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} A_p = A_p(\infty) = 0$$

$$F_x = kx$$

$$F_0$$

$$\omega_0 = 1, F_0 = 1, m = 1$$



Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

• Amplituda kmitů:

$$\frac{dA_p}{d\Omega} = \frac{2F_0(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2)\Omega}{m[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{3/2}}$$

$$\frac{dA_p}{d\Omega} = 0$$

↓

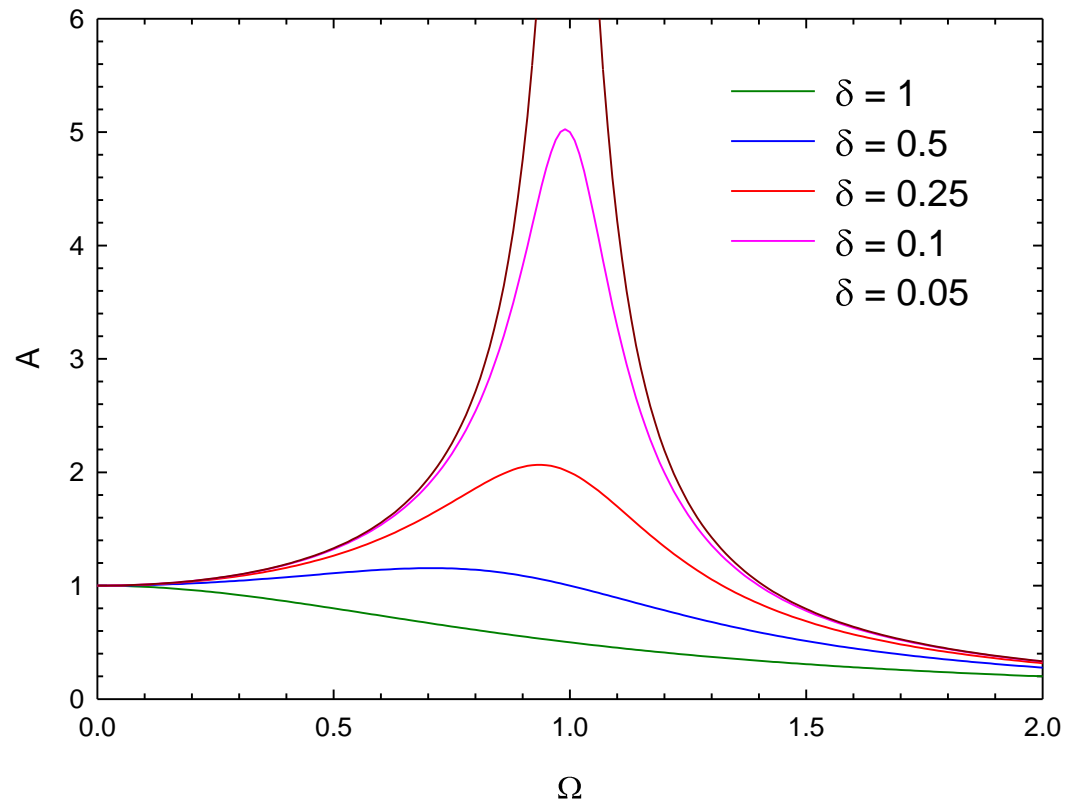
• rezonance amplitudy

$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \Rightarrow \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A_p(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)}}$$

$$A_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\omega_0 = 1, F_0 = 1, m = 1$$



Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

• Amplituda kmitů:

$$\frac{dA_p}{d\Omega} = \frac{2F_0(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\delta^2)\Omega}{m[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2]^{3/2}}$$

$$\frac{dA_p}{d\Omega} = 0$$

↓

• rezonance amplitudy

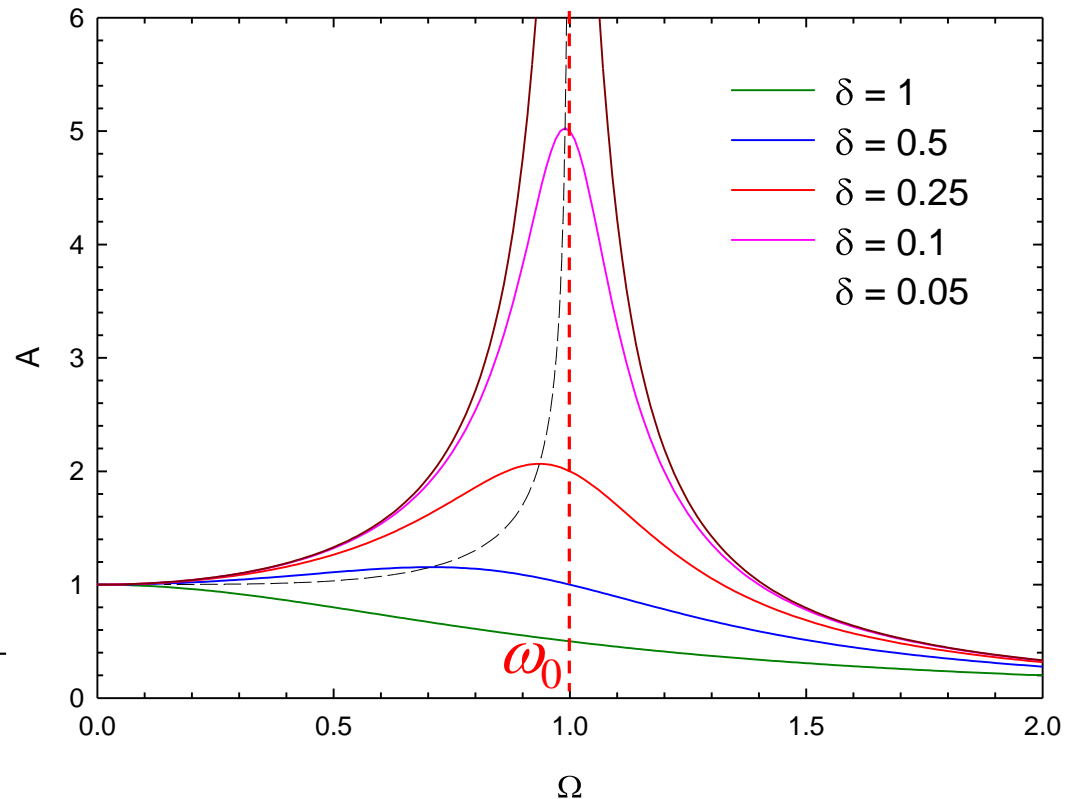
$$\Omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\delta^2 \Rightarrow \Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$A_p(\Omega_r) = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{(\omega_0^2 - \delta^2)}}$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} A_p(\Omega_r) = \infty \quad x_s = A_p(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

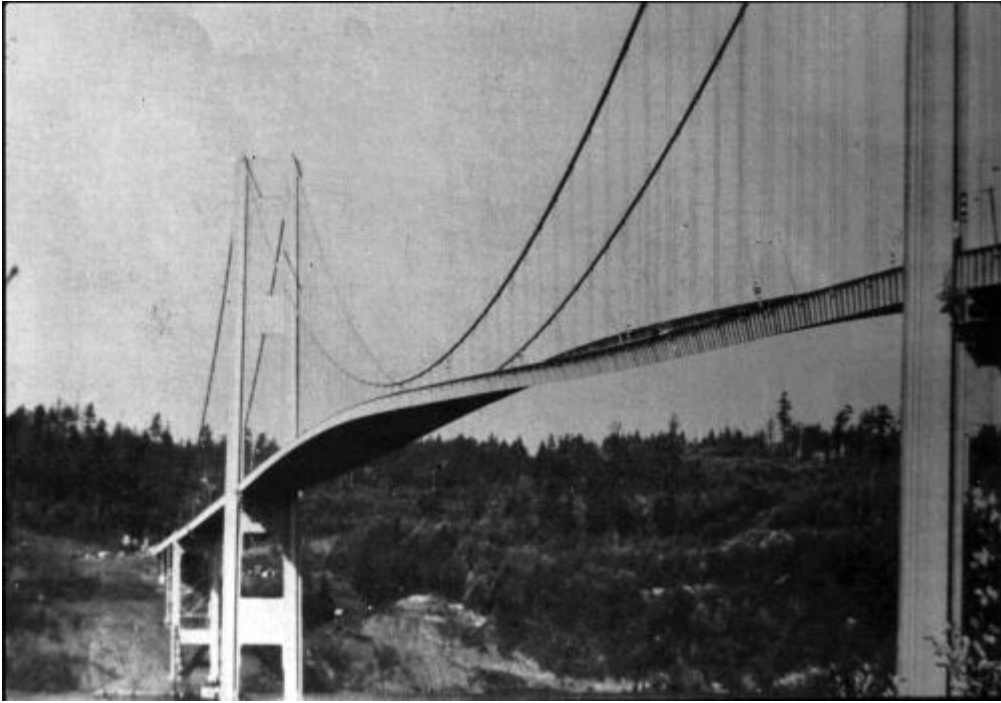
$$A_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\omega_0 = 1, F_0 = 1, m = 1$$

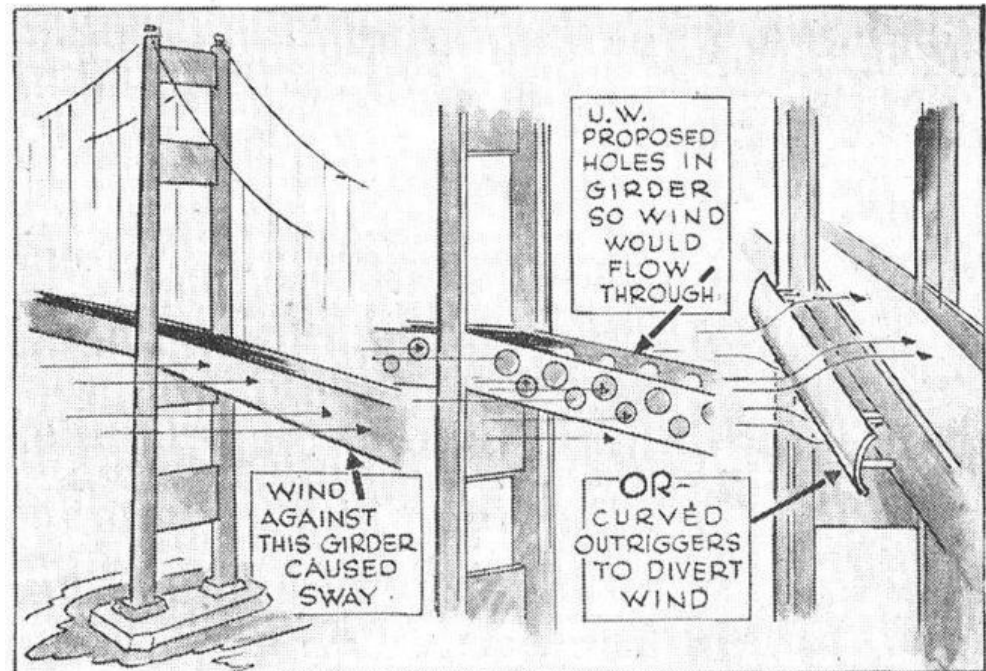


Mechanická rezonance

- Tacoma Narrows Bridge (1940), Tacoma, Washington U.S.



WOULD THIS HAVE SAVED BRIDGE?



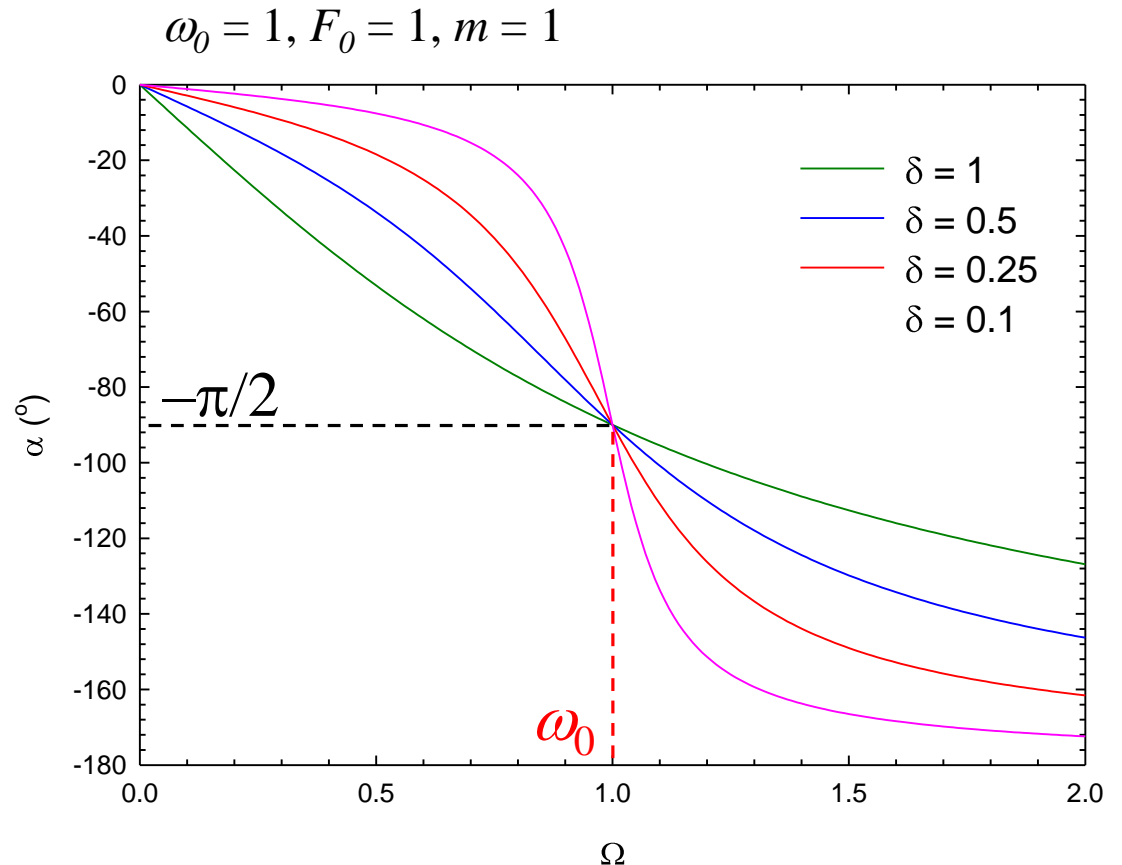
Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

• **Fázový posuv:** $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$

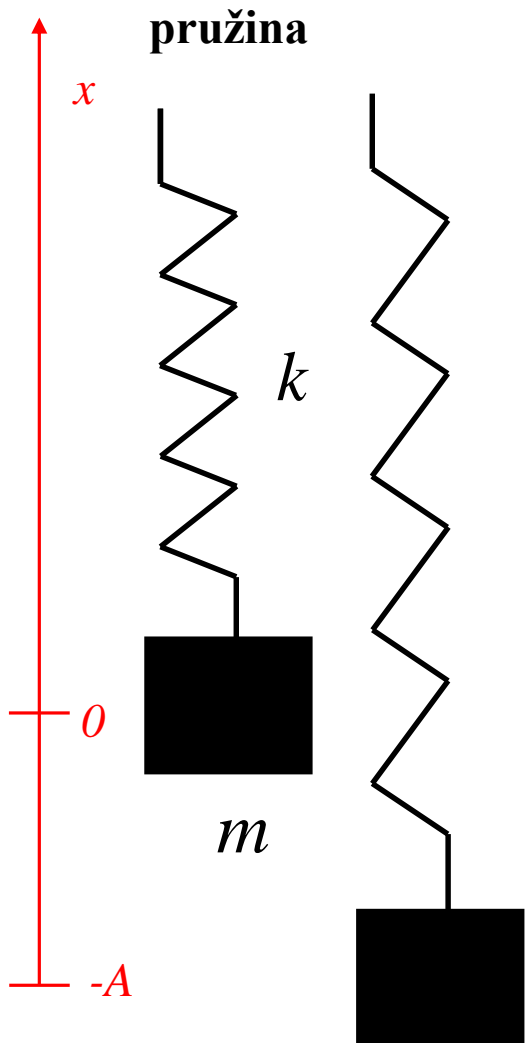
$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

$$\alpha(\Omega_r) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\Omega_r}{\delta}\right)$$

- malé Ω : pohyb přibližně ve fázi s vynucující silou
- oblast rezonance $\Omega \approx \omega_0$:
fázové zpoždění $-\pi/2$
(pohyb je přibližně ve fázi s rychlostí)
- velké Ω :
fázové zpoždění $-\pi$



Opakování - Harmonický oscilátor – pružina



$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$F_x = -kx$$

$$a_x = -\frac{k}{m}x$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad \text{pohybová rovnice}$$

obecné řešení:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

úhlová
frekvence $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

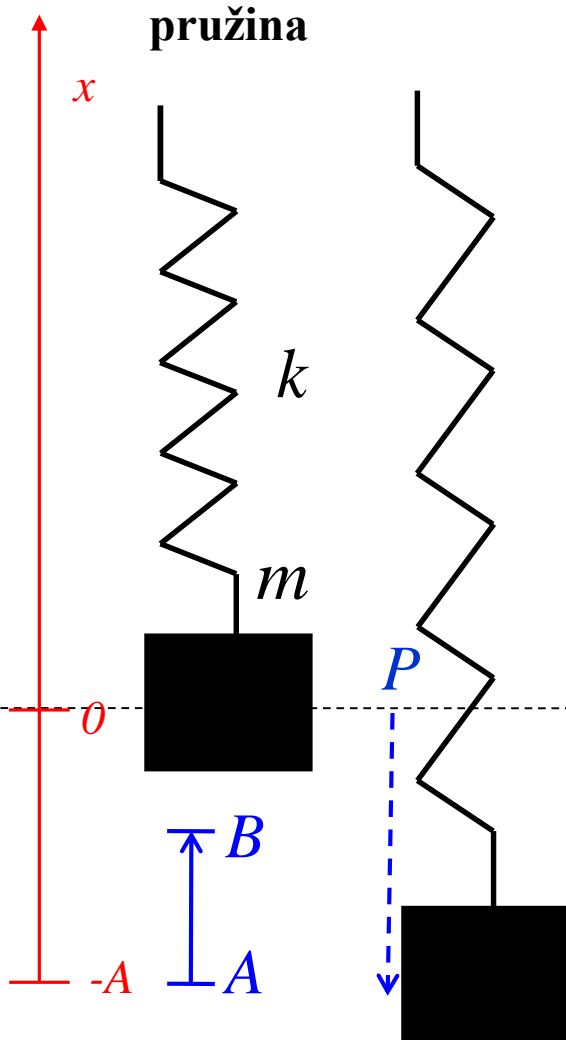
fázový posuv

$$x(t) = A \cos \varphi \sin \omega t + A \sin \varphi \cos \omega t$$

$$C_1 = A \cos \varphi, \quad C_2 = A \sin \varphi$$

$$x(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

Opakování - Harmonický oscilátor – potenciální energie



práce, kterou vykoná pružina při přesunu závaží z A do B :

$$A_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} -kx \, dx = -\frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

$$A_{PA} = \int_{x_P}^{x_A} -kx \, dx = -\frac{1}{2}k(x_A^2 - x_P^2) = -\frac{1}{2}kx_A^2$$

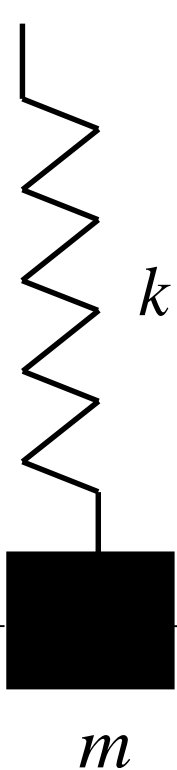
potenciální energie v bodu A: $E_p(A) = -A_{PA} = \frac{1}{2}kx_A^2$

hladina nulové potenciální energie

potenciální energie pružiny: $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$

Opakování - Harmonický oscilátor – kinetická energie

pružina



potenciální energie:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad \dot{x}(t) = A \omega \cos(\omega t + \varphi), \quad k = m \omega^2$$
$$E_p(x) = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

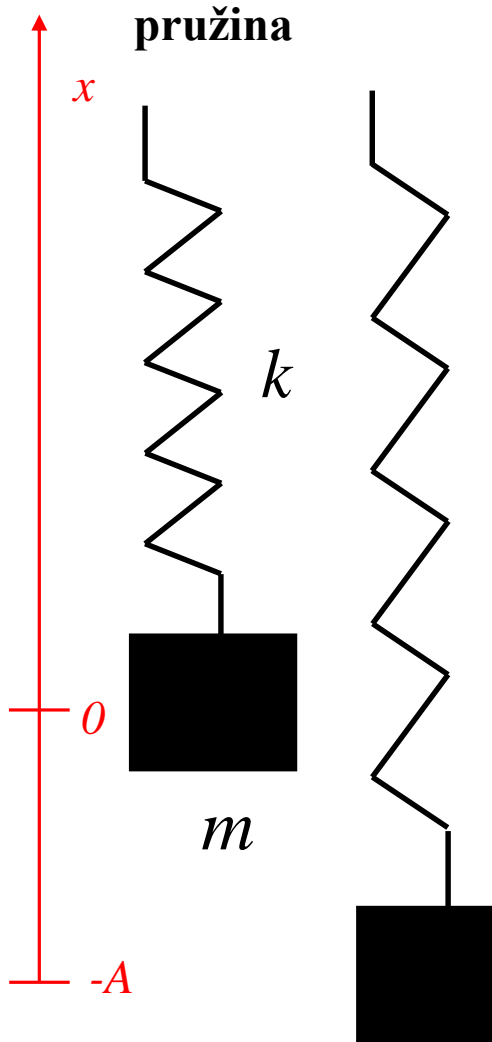
kinetická energie:

$$E_k = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

celková energie : $E_M = E_k + E_p = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$

Celková mechanická energie harmonického kmitu je konstantní
nezávislá na čase.

Opakování – Tlumený harmonický kmit



Tlumící (odporová) síla:

$$F_v = -h\dot{x}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

Řešení : $x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$

Pohybová rovnice:

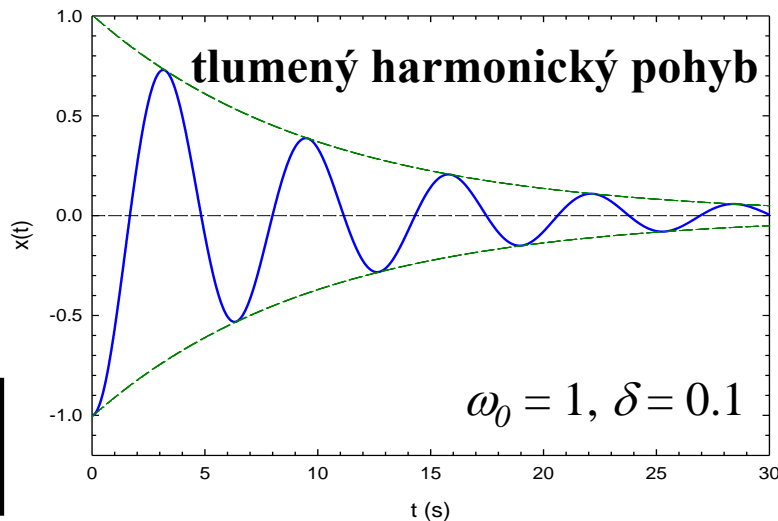
$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

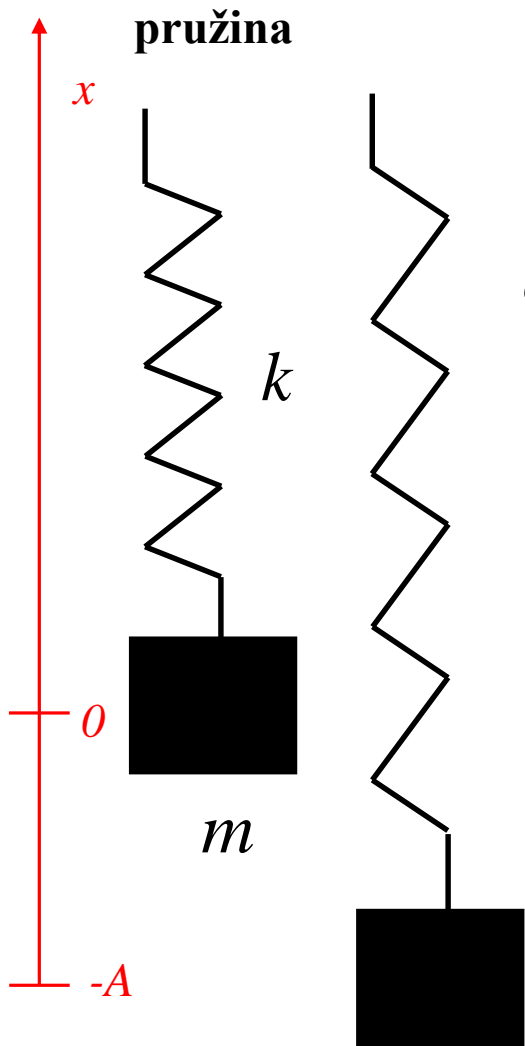
$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$D = 4\delta^2 - 4\omega_0^2 < 0$$

$$x = A e^{-\delta t} \sin(\omega t + \alpha)$$



Mechanická energie tlumeného harmonického kmitu



Tlumící (odporující) síla:

$$F_v = -h\dot{x}$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

Pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

Celková mechanická energie tlumeného harmonického kmitu je vlivem disipativní odporující síly závislá na čase.

$$E_m(t) = E_k + E_p = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

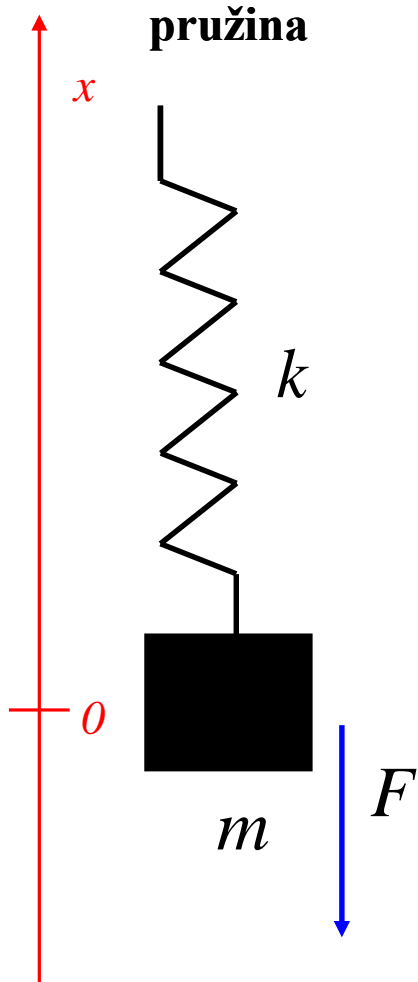
Pro časovou změnu mechanické energie můžeme tedy psát:

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dx}{dt} \left(m \frac{d^2x}{dt^2} + kx \right) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = -h \frac{dx}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{dx}{dt} F_v = -h \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Rychlost ubývání mechanické energie tlumeného harmonického kmitu.

Mechanická energie nucených kmitů s tlumením v ustáleném stavu



- budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

- pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$x_p = A_p \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\dot{x}_p = A_p \Omega \cos(\Omega t + \alpha)$$

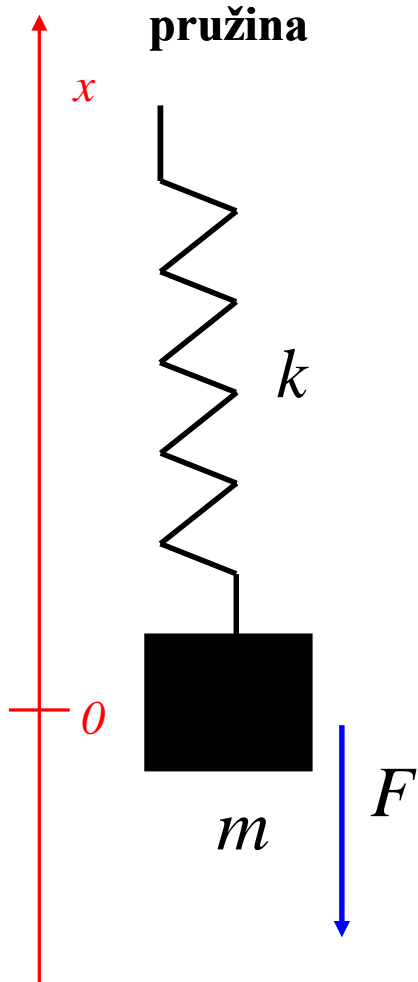
Působením disipativní síly F_v se energie rozptyluje i v případě nucených harmonických kmitů v ustáleném stavu:

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{dx}{dt} F_v = -h \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

Energie rozptýlená během jednoho kmitu působením disipativní síly F_v :

$$\Delta E_m = -h \int_0^T \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 dt = -h \int_0^T \left(A_p \Omega \cos(\Omega t + \alpha) \right)^2 dt = -h A_p^2 \Omega^2 \frac{T}{2}$$

Mechanická energie nucených kmitů s tlumením v ustáleném stavu



• budící síla:

$$F = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}, \quad 2\delta \equiv \frac{h}{m}$$

pohybová rovnice:

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin(\Omega t)$$

$$x_p = A_p \sin(\Omega t + \alpha)$$

$$\dot{x}_p = A_p \Omega \cos(\Omega t + \alpha)$$

V ustáleném stavu je však úbytek energie doplněn prací vykonanou na hmotný bod vynucující silou F . Průměrný výkon P_v disipativní síly F_v během jednoho kmitu a průměrný výkon P vynucující síly F jsou pak:

$$P = -P_v = -\frac{\Delta E_m}{T} = h A_p^2 \Omega^2 \frac{1}{2} = m \delta A_p^2 \Omega^2$$

$$A_p = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}} \Rightarrow P = \frac{F_0 \Omega^2 \delta}{m [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2]}$$

Nucené kmity s tlumením v ustáleném stavu

- výkon vynucovací síly:

$$P(\Omega) = \frac{F_0^2 \Omega^2 \delta}{m \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2 \right]}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = 0 \longrightarrow$$

rezonance výkonu
nastává pro

$$\Omega = \omega_0$$

$$P(\omega_0) = \frac{F_0^2}{4m\delta}$$

$$\frac{1}{2} P(\omega_0) = \frac{F_0^2}{8m\delta} = \frac{F_0^2 \Omega^2 \delta}{m \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2 \right]}$$

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 = 4\delta^2 \Omega^2$$

- činitel jakosti

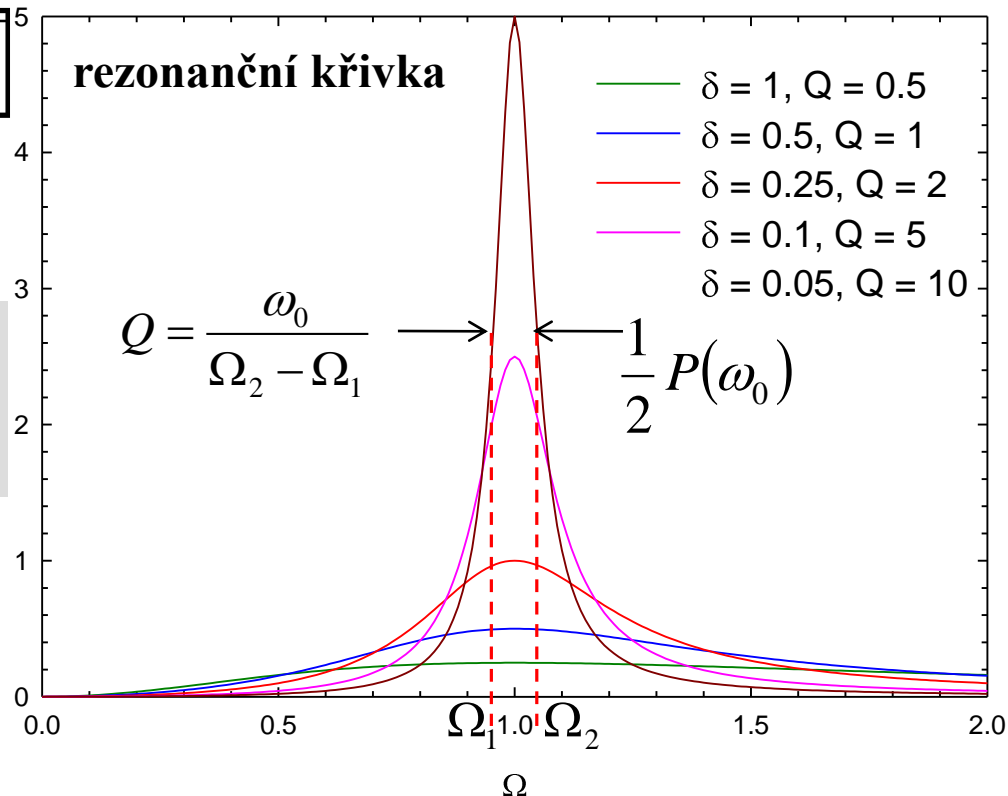
$$Q = \frac{\omega_0}{\Omega_2 - \Omega_1} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

$$\Omega_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$$

$$\Omega_2 = +\delta + \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2}$$

$$\Omega_3 = -\delta - \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2} < 0$$

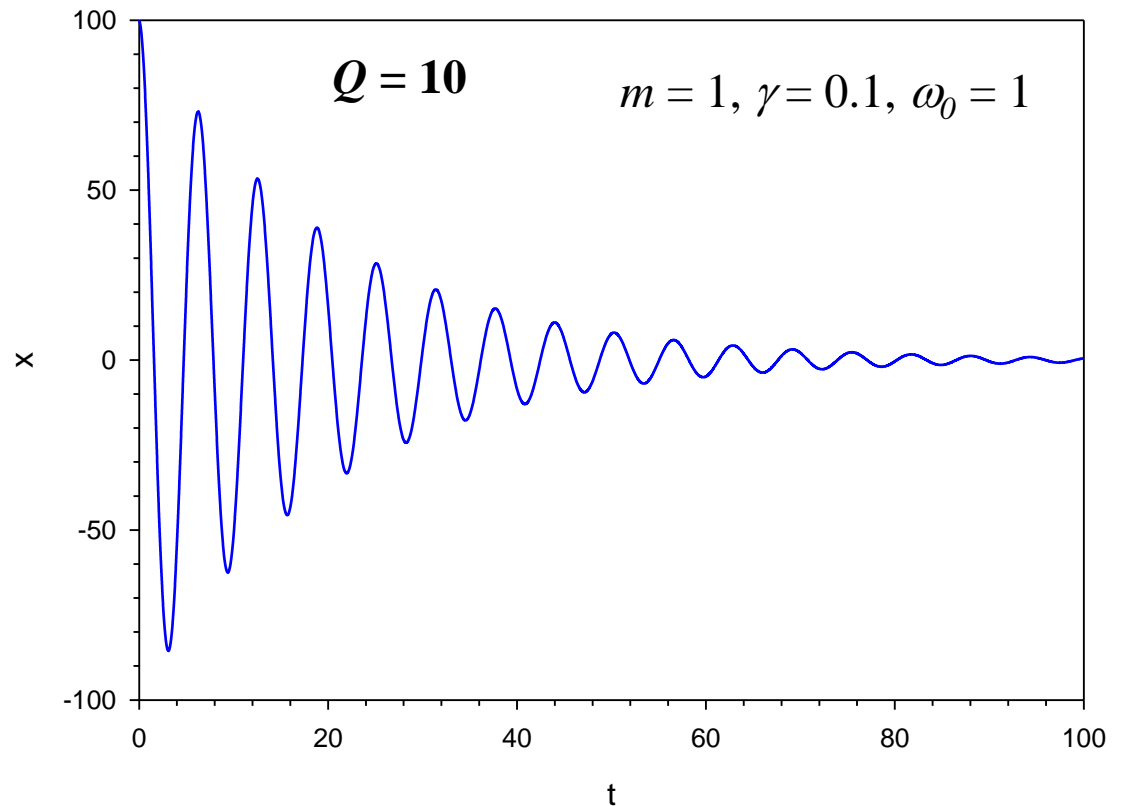
$$\Omega_4 = +\delta - \sqrt{\delta^2 + \omega_0^2} < 0$$



Nucené kmity s tlumením

- pokud přestane působit vynuocovací síla bude amplituda kmitů klesat jako $e^{-\delta t} = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$
- za jednu periodu poklesne faktorem $e^{-\frac{\omega_0 T}{2Q}} = e^{-\frac{\pi}{Q}}$

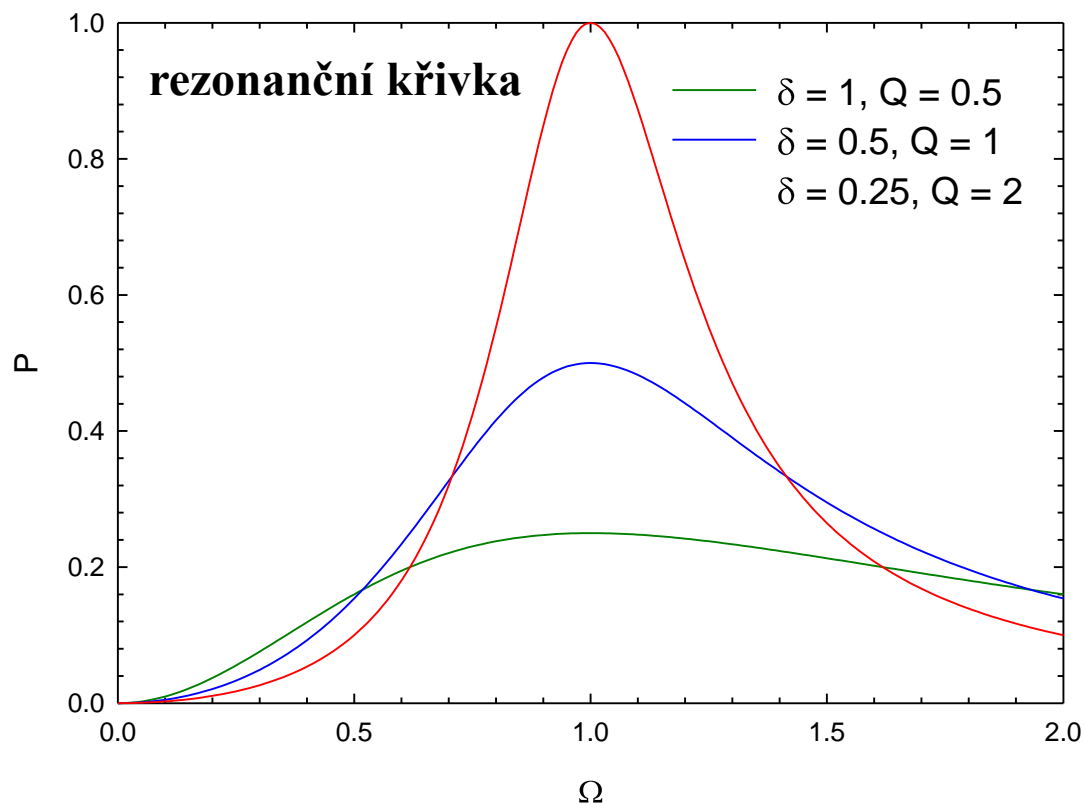
Q – za kolik cyklů se amplituda zmenší faktorem $e^{-\pi}$



Nucené kmity s tlumením

- výkon vynucovací síly:

$$P(\Omega) = \frac{F_0^2 \Omega^2 \delta}{m \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2 \right]}$$



Nucené kmity s tlumením

- výkon vynucovací síly:

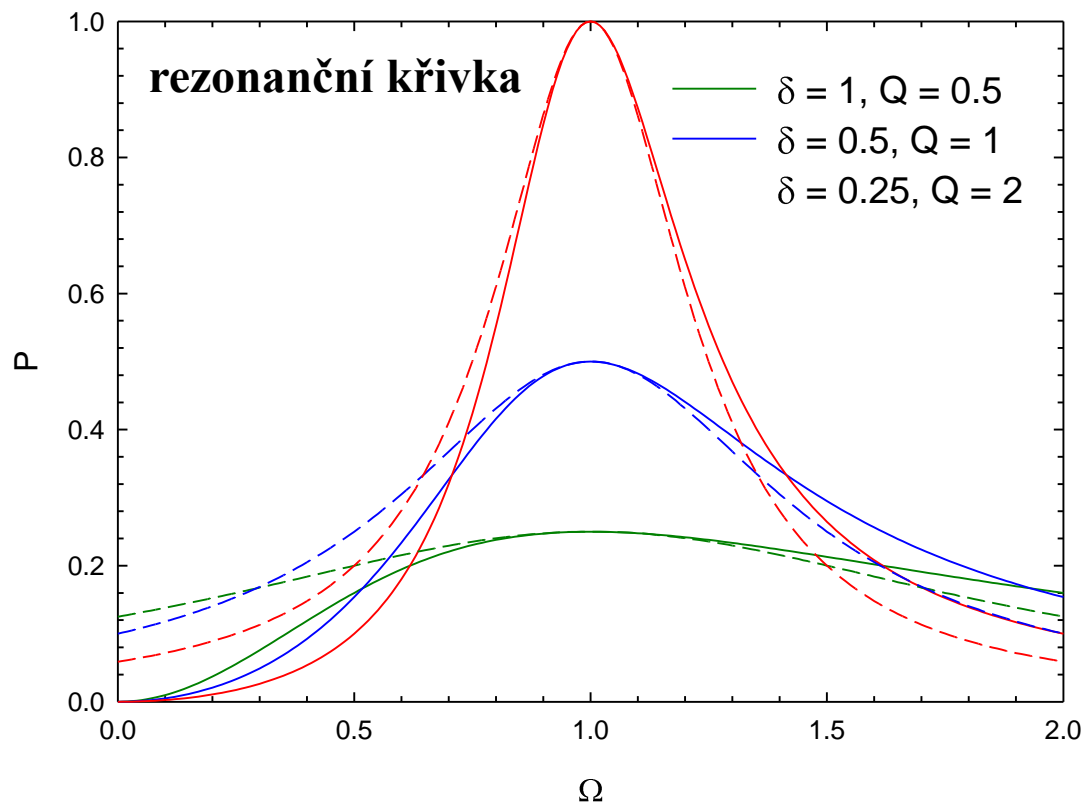
$$P(\Omega) = \frac{F_0^2 \Omega^2 \delta}{m \left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2 \right]}$$

- v blízkosti rezonance $\Omega \approx \omega_0$:

Lorentzián

$$P_F \approx \frac{F_0^2 \delta}{4m \left[(\omega_0 - \Omega)^2 + \delta^2 \right]}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$$



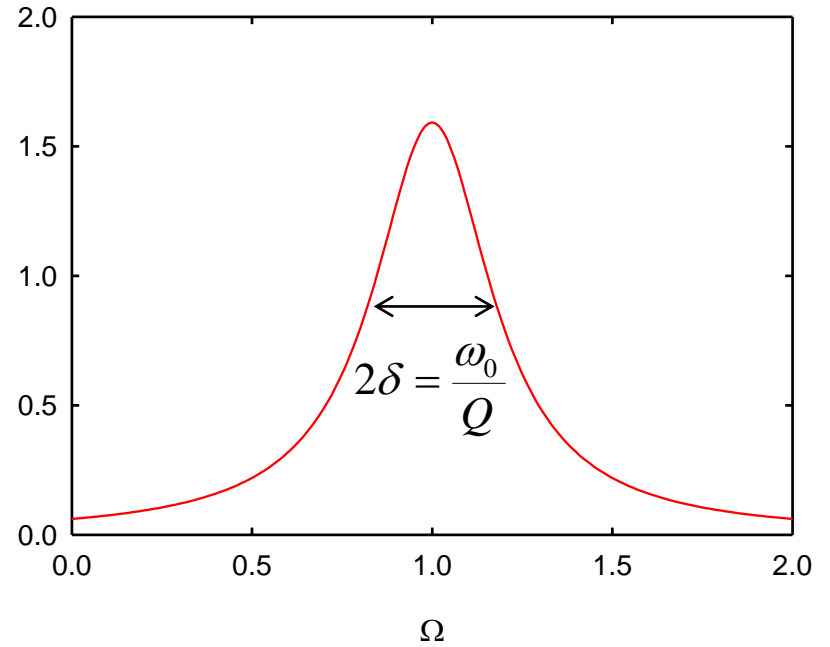
Univerzální rezonanční křivka

- Lorentzián

$$I(\Omega) = \frac{\delta}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \delta^2}$$

rezonanční frekvence

tlumení



Rezonance v elektrických obvodech

• RLC obvod $U(t) = U_C + U_R + U_L$

• kondenzátor $U_C = \frac{q}{C}$

• odpor $U_R = RI = R \frac{dq}{dt}$

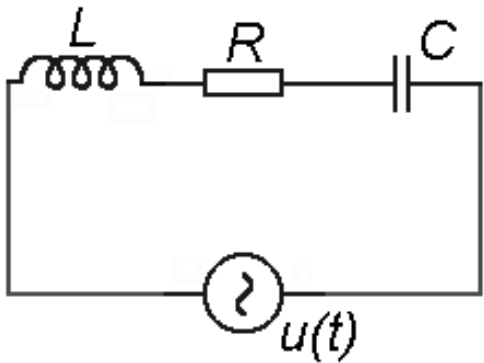
• cívka $U_L = L \frac{dI}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = U(t) = U_0 e^{i\Omega t}$$

$$q = q_0 e^{i(\Omega t + \alpha)}$$

$$L(i\Omega)^2 q_0 + Ri\Omega q_0 + \frac{1}{C} q_0 = U_0 e^{-i\alpha}$$

$$q_0 \left(\frac{1}{C} - L\Omega^2 + iR\Omega \right) = U_0 e^{-i\alpha}$$



$$Z = Z_0 e^{i\beta}, \quad Z_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\Omega^2 \right)^2 + R^2 \Omega^2}, \quad \text{tg} \beta = \frac{R\Omega}{\frac{1}{C} - L\Omega^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 2\delta = \frac{R}{L} \quad q_0 Z_0 e^{i\beta} = U_0 e^{-i\alpha} \Rightarrow$$

$$q_0 = \frac{U_0}{Z_0} = \frac{U_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}, \quad \text{tg} \alpha = \frac{2\delta\Omega}{(\Omega^2 - \omega_0^2)}$$

Ekvivalence mechanické a elektrické rezonance

• vlastnost

- nezávisle proměnná
- závisle proměnná
- setrvačnost
- odpor
- tuhost
- vlastní frekvence
- perioda
- činitel jakosti

• mechanická rezonance

- čas t
- poloha x
- hmotnost m
- koeficient tření, $h = 2\delta m$
- mechanická tuhost k
- $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
- $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
- $Q = \frac{\omega_0}{2\delta}$

• elektrická rezonance

- čas t
- náboj q
- indukčnost L
- elektrický odpor, $R = 2\delta L$
- 1 / kapacita, C^{-1}
- $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$
- $T = 2\pi\sqrt{LC}$
- $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$

Higgsův boson

$$I(\Omega) = \frac{\delta}{(\omega_0 - \Omega)^2 + \delta^2}$$

klidová hmotnost

rychlost rozpadu

$$\omega_0 = 125 \text{ GeV}$$

